CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum: 24 juli 2023
Tijd: 12.30 – 15.30 uur
Aantal opgaven: 6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:						
Opgave	1	2	3	4	5	6
a	6	5	5	4	3	4
b	6	6	5	5	6	4
c			4	2	4	5
e				5		2
Totaal	12	11	14	16	13	15

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche vaardigheden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Bij het ***algebraïsch*** *uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals* $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$.
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 15x^6 - 24x^5 + 10x^4$.

6pt a Bereken algebraïsch de minimale waarde van $f(x)$.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = x \cdot \sqrt{2x^2 + 7}$.

6pt b Bereken algebraïsch een vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van g in het punt $A(1, 3)$.

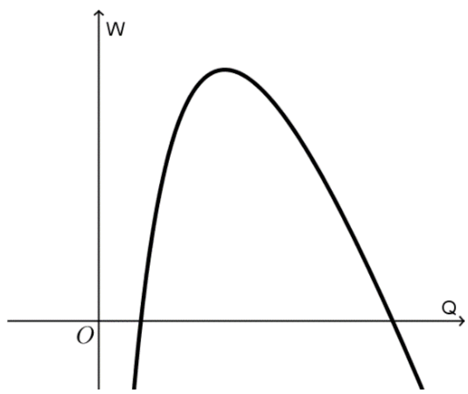
Opgave 2 – Vlees van Vis, da's niet mis!

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Marktkoopman Vis staat iedere dag met eersteklas vlees op de markt. Zijn broer, een bekend econoom, heeft de omzetgegevens van marktkoopman Vis bestudeerd en hij heeft daarbij de volgende formule opgesteld voor het verband tussen de winst die Vis op een dag maakt en de hoeveelheid vlees die hij voor die dag inkoopt.

$$W = 18 - 3Q - \frac{64}{3Q+2}$$

Hierin is *W* de winst in honderden euro's en is *Q* de ingekochte hoeveelheid vlees in honderden kilo's.
In de figuur hiernaast ziet u een schets van de grafiek van *W* als functie van *Q*.



5pt a Bereken algebraïsch de waarden van *Q* waarvoor geldt $W = 0$.
(De *break-even* waarden.)

6pt b Bereken algebraïsch de maximale winst die Vis op een dag kan maken.

Opgave 3 – Ganzenborden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Ganzenborden is een spel waarin twee of meer spelers met hun pionnen (vaak in de vorm van een gans) het hieronder afgebeelde parcours afleggen. Het aantal velden dat een gans vooruit gaat, wordt bepaald door een worp met twee gewone dobbelstenen.

Zoals u kunt zien, is er een aantal speciale velden, zoals veld 5, veld 6, veld 9 en veld 12. In vraag a en c hoeft u geen rekening te houden met de betekenis van deze velden.

Bert en Ernie spelen dit spel. In zijn eerste beurt landt de gans van Bert op veld 4.

5pt **a** Bereken de kans dat de gans van Ernie landt op een veld dat verder van de start ligt.

Twee van de speciale velden zijn de put (veld 31) en de gevangenis (veld 52). Als een gans op één van deze velden landt, moet de speler wachten totdat een andere gans op dit veld landt. Als er maar twee spelers zijn, is er een kans van 22% dat één van de spelers in de put landt en de andere in de gevangenis. In dat geval eindigt het spel onbeslist.

5pt **b** Bereken de kans dat Bert 4 van de eerste 10 spellen wint, aangenomen dat bij elk spel iedere speler evenveel kans heeft om te winnen.

Later doet Tommy ook mee met het spel.

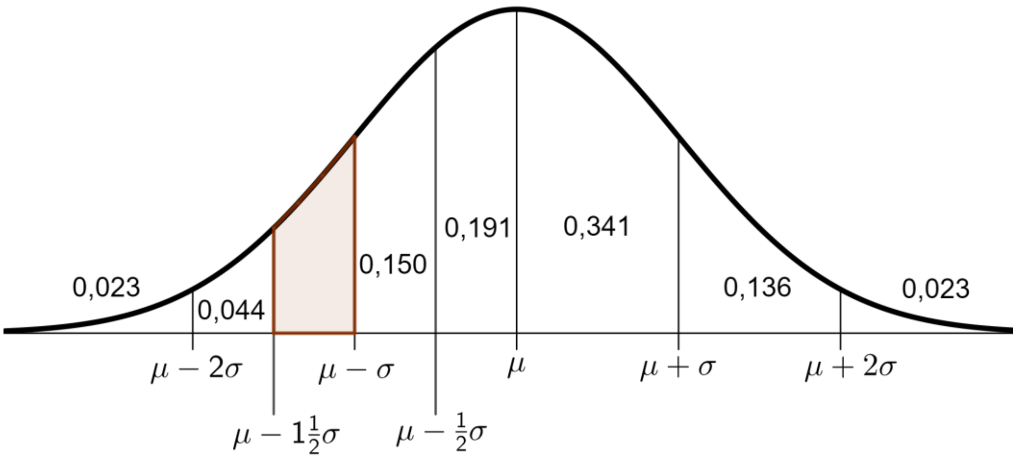
4pt **c** Bereken de kans dat de ganzen van Bert, Ernie en Tommy in de eerste beurt van een spel alle drie op veld 7 landen.

Opgave 4 – Olijfolie

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De Olivia fabriek verkoopt olijfolie in glazen flessen. De inhoud van de olijfolie in deze flessen is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 450$ ml en een standaardafwijking van $\sigma = 2$ ml.

4pt a Gebruik de figuur hieronder om het percentage van deze flessen te berekenen dat tussen 448 en 451 ml olijfolie bevat.



Een normale kansverdeling X. De oppervlakte van het gearceerde vlakdeel komt overeen met $P\left(\mu - 1\frac{1}{2}\sigma < X < \mu - \sigma\right) = 0{,}092$.

Bij kamertemperatuur (20℃) is de dichtheid van deze olijfolie 920 kg/m^3. Dit betekent dan het gewicht van de olijfolie in een fles van Olivia normaal verdeeld is met een gemiddelde van $\mu = 414$ g en een standaardafwijking van $\sigma = 1{,}84$ g.
Het gewicht van een met olijfolie gevulde fles is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 500$ g en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ g.

5pt b Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van het gewicht van een lege fles.

Bij een kwaliteitscontrole wil de Olivia fabriek toetsen of de gemiddelde inhoud van de olijfolie in een fles inderdaad 450 ml is. Daartoe wordt de inhoud van 25 flessen olijfolie gemeten. Men neemt aan dat deze inhoud normaal verdeeld is met een standaardafwijking van $\sigma = 2$ ml en men neemt als onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0.05$.

2pt c Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

5pt d Wat is de conclusie van deze toetsingsprocedure als de gemiddelde inhoud van de 25 onderzochte flessen 450,7 ml is?

Opgave 5 – UV-index en Wolfgetal

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De UV-index is een maat voor de hoeveelheid ultraviolette straling in het zonlicht die de aarde bereikt. Deze straling is de oorzaak van het verbranden van de huid. Hoe hoger de UV-index, hoe korter de tijd dat iemand aan direct zonlicht kan worden blootgesteld voordat de huid verbrandt, zie de tabel hieronder.

UV-index (*U*)	2	5	7
Minuten totdat de huid verbrandt (*m*)	50	20	15

Het is duidelijk dat het verband tussen de variabelen *U* en *m* niet lineair is.

3pt **a** Onderzoek of er een exponentieel verband bestaat tussen *U* en *m*.

In Nederland is de gemiddelde waarde van de UV-index minimaal in januari en maximaal in juli. Dit gemiddelde kan worden benaderd met een formule van de vorm

$$U = a + b\sin(c(t-d)).$$

In deze formule is t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari.

6pt **b** Bepaal de waarden van a, b, c en d in deze formule als gegeven wordt dat de minimale waarde $U = 0{,}4$ op 1 januari bereikt wordt en dat de maximale waarde $U = 7{,}0$ op 1 juli bereikt wordt.
Verklaar uw antwoorden.

Het Wolfgetal is een maat voor het aantal zonnevlekken op de oppervlakte van de Zon. Dit getal kan worden benaderd door de formule

$$W = 87 + 73 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{11}(t - 2{,}75)\right)$$

In deze formule is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1976.

4pt **c** Bereken algebraïsch de jaren tussen 1976 en 2023 waarin het Wolfgetal volgens deze formule maximaal was.

Opgave 6 – Een warm huis

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Eén van de eerste dingen die Rob doet als hij terugkomt van een vakantie in de winter is het aanzetten van de verwarming in zijn woonkamer. Vanaf dat moment wordt de temperatuur in deze kamer gegeven door de formule

$$T = 4 \cdot (5 - 3 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t})$$

In deze formule is T de temperatuur in ℃ en is t de tijd in uren, met $t = 0$ op het moment dat Rob de verwarming aan zet.

4pt **a** Bereken algebraïsch het percentage waarmee de waarde van T toeneemt tussen $t = 0$ en $t = 2$.

4pt **b** Gebruik de afgeleide $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ om algebraïsch de snelheid in ℃ per uur te berekenen waarmee de waarde van T toeneemt op $t = 1$.

5pt **c** Bereken algebraïsch het tijdstip waarop de temperatuur 16℃ is.
Geef uw antwoord in minuten nauwkeurig.

2pt **d** Bereken de maximale temperatuur in de woonkamer van Rob volgens de hierboven gegeven formule.

Einde van het tentamen.

*Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of **uw naam** en het **opgavenummer** op ieder antwoordblad staat.*
Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

*Wat er **niet** in het mapje moet:*
- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;
- kladpapier;
- deze opgaven.

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0$
${}^{g}\log a^p = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ p > 0,\ \ p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S) = n \cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

$E(\overline{X}) = E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ met $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Verwachtingswaarde: $E(X) = np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X < g) = P\left(Z < \frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g = \mu_T - 1{,}645\sigma_T$	$g = \mu_T + 1{,}645\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 1{,}96\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 1{,}96\sigma_T$
0,01	$g = \mu_T - 2{,}33\sigma_T$	$g = \mu_T + 2{,}33\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 2{,}58\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 2{,}58\sigma_T$